

Inlämningsuppgift 1

Christian Dahlqvist

September 26, 1999

1 Uppgift 1

Lös den följande partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (x > 0) \quad (1)$$

Ledning: Använd transformationen

$$\begin{cases} u = x^2 - y \\ v = x^2 + y \end{cases}$$

Lösning:

$\frac{\partial f}{\partial x}$ söks

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

□

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ söks

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot 2x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot 2x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot 2x = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot 2x + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot 2x + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = \\ &= 2x \cdot \frac{\partial}{\partial u} 2x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + 2x \cdot \frac{\partial}{\partial v} 2x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + 2x \cdot \frac{\partial}{\partial u} 2x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) + 2x \cdot \frac{\partial}{\partial v} 2x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = \\ &= 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u^2} + 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u \partial v} + 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v \partial u} + 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v^2} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = \\ &= 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u^2} + 8x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u \partial v} + 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v^2} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ söks

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= -1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

□

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ söks

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = \\ &= \frac{-\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \\ &= -2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\end{aligned}$$

□

□

Insättes i (1)

$$\begin{aligned}& \left(4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u^2} + 8x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u \partial v} + 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v^2} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) - \\ & - 4x^2 \cdot \left(-2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) - \frac{1}{x} \cdot \left(2x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u^2} + 8x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u \partial v} + 4x^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v^2} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \\ & + 8x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 16x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0, \quad (x > 0) \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial u} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)}_{=g(v)} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v} &= g(v) \\ \partial f &= g(v)\partial v \\ \int \partial f &= \int g(v)\partial v \\ f(u, v) &= G(v) + H(u) \\ f(x, y) &= G(x^2 + y) + H(x^2 - y)\end{aligned}$$

□

Svar:

$$f(x, y) = G(x^2 + y) + H(x^2 - y)$$

2 Uppgift 2

Bestäm talen a och b sådana att funktionen

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + z^2 + xy + 3x + 4y - 7z$$

i punkten

$$P = \{1, 1, 1\}$$

har sin maximala tillväxt i riktningen $\vec{u} = (2, 3, -1)$

Lösning:

$$\begin{aligned}\text{grad } f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ \text{grad } f(1, 1, 1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(1,1,1)}\end{aligned}$$

Vilket ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2ax + y + 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2by + x + 4 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z - 7\end{aligned}$$

I vilket punkten $P = (1, 1, 1)$ sätts in

$$\frac{\partial f}{\partial x_{(1,1,1)}} = 2a + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_{(1,1,1)}} = 2b + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_{(1,1,1)}} = -5$$

Gradienten skall vara parallell med riktningsvektorn varför följande gäller

$$\begin{pmatrix} 2a + 4 \\ 2b + 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot k \\ 3 \cdot k \\ -1 \cdot k \end{pmatrix}$$

Följande fås

$$-1 \cdot k = -5$$

$$k = 5$$

□

$$2a + 4 = 2 \cdot 5$$

$$2a = 10 - 4$$

$$a = \frac{6}{2} = 3$$

□

$$2b + 5 = 3 \cdot 5$$

$$2b = 15 - 5$$

$$b = \frac{10}{2} = 5$$

□

Slutligen fås

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 5y + xy + 3x + 4y - 7z$$

□

Svar:

$$a = 3$$

$$b = 5$$

3 Uppgift 3

Tangentplanet i en punkt P på enhetsfären går genom punkterna $(3, 0, 0)$ och $(0, 3, 0)$. Bestäm alla punkter P med denna egenskap.

Lösning:

Punkterna $(3, 0, 0)$ och $(0, 3, 0)$ ger en vektor i planet.

$$\vec{v}_1 = (3, 0, 0) - (0, 3, 0) = (3 - 0, 0 - (-3), 0 - 0) = (3, 3, 0)$$

Ekvationen för en sfär är

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

vilket ger med $r = 1$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Tack vare symmetrin mellan de båda punkterna på x - och y -axlarna och sfären, med sitt centrum i origo, kommer x och y att vara lika stora i punkten P . Problemet angrips genom att skapa en vektor i riktning $(1, 1, 0)$ som utgör en ny axel. Vektorn \vec{u} kommer att utgöra denna "axel". Då kan allt ses i två dimensioner. Att göra på detta sätt innebär också att vi undersöker i området $x \geq 0$ och $y \geq 0$. Vektorn \vec{u} kommer att skära \vec{v}_1 på mitten. Det vill säga skärningspunkten ligger i mitten av den kvadrat med sidan 3 l.e. som spänns upp av x - och y -axlarna. För att finna punkten P där planet kommer att skära vektorn \vec{u} används Pythagoras sats

$$\frac{\vec{v}_1}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, 0 \right)$$

$$|\vec{v}_1| = \left| \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, 0 \right) \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{3^2}{2} + \frac{-3^2}{2} + 0} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Nu kan problemet studeras i två dimensioner, (u, z) . Enhetsfären kan ses som enhetscirkeln ($r^2 = u^2 + z^2$) och tangentplanet som en linje som skär

u -“axeln” i punkten $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Lutningen på tangentlinjen skall vara den samma som för enhetscirkeln i en given punkt (u_0, z_0) . Riktningkoefficienten ges av derivatan av funktionen för enhetscirkeln i en given punkt.

$$r^2 = u^2 + z^2$$

$$z(u) = \sqrt{r^2 - u^2} = \sqrt{1 - u^2}$$

$$z'(u) = \frac{1}{2} \cdot (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2u = -\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Funktionen för linjen kommer således att bli

$$f(u) = -\frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}} \cdot u + f(0)$$

där $f(0)$ är linjens skärningspunkt på z -axeln.

$$f(u) = ku + m$$

$$0 = ku_1 + m$$

$$m = -ku_1$$

där u_1 är punkten där f skär u -axeln. Här betyder det att

$$m = f(0) = -\left(-\frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Detta resonemang leder till

$$f(u) = -\frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}} \cdot u + \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Det kommer finnas ett värde på u där linjens ekvation, $f(u)$, har samma värde som funktionen för enhetscirkeln, $z(u)$.

$$\sqrt{1 - u_0^2} = -\frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}} \cdot u_0 + \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$1 - u_0^2 = -u_0^2 + u_0 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$1 = u_0 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$u_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

För att kunna rita upp linje och cirkel grafiskt insättes u_0

$$\begin{aligned} -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} &= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{1-\frac{2}{9}}} = \\ &= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{\frac{7}{9}}} = -\sqrt{\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{7}} = -\sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

Linjens ekvation ser då ut så här

$$f(u) = -\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot u + \left(-\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

$$f(u) = -\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot u - \sqrt{\frac{18}{14}}$$

$$f(u) = -\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot u - \sqrt{\frac{9}{7}}$$

Värdet på u_0 insättes i ekvationen för enhetscirkeln för att få z_0

$$z\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Alltså skall z i sfären ha detta värde. Tidigare har det sagts att $x = y$. x beräknas

$$z(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$z(x_0, y_0) = z(x_0, x_0) = \sqrt{1-2 \cdot x_0^2}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{3} = \sqrt{1-2 \cdot x_0^2}$$

$$\frac{7}{9} = 1-2 \cdot x_0^2$$

$$2 \cdot x_0^2 = 1 - \frac{7}{9}$$

$$x_0^2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$$

Eftersom villkoret $x \geq 0, y \geq 0$ är endast det positiva svaret intressant. Då kvadranten som undersökts har positiva värden på z måste, på grund av symmetri, hänsyn tas till att det finns en punkt på randen som är $-z_0$ och överensstämmer med x_0 och y_0 .

För att undersöka huruvida detta är riktigt kan punkterna sättas in i ekvationen för enhetssfären. Är resultatet riktigt skall svaret bli 1 eftersom punkten ligger i randen.

$$r^2 = 1 = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{7}{9} = 1$$

vilket visar att punkterna är riktiga.

Svar:

$$P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

och

$$P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$